

数学的思考力テスト解答用紙

※ 解答欄には答えだけではなく、その答えを導く過程も記入しなさい。

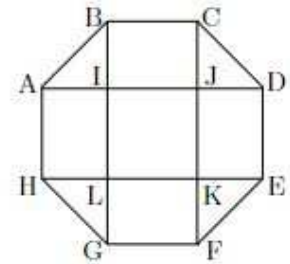
※ 解答欄に解答が収まらない場合は裏面を使用してもよい。その場合は、どの問題に対する解答であるかを明記すること。

I.

(1) $F(a)$ は縦の長さが2、横の長さが $2 - a$ の長方形の面積であるから、 $F(a) = 2(2 - a) = 4 - 2a$ となる。

(2) 右の図のような一辺の長さが a である正八角形 $ABCDEFGH$ を考える。

$AI = BI = \frac{a}{\sqrt{2}}$ であるから、直角三角形 ABI の面積は $\frac{1}{2} \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}$ となる。同様にして、直角三角形 CDJ 、直角三角形 EFK 、直角三角形 GHL の面積も $\frac{a^2}{4}$ である。また、 $AH = a$ 、 $AI = \frac{a}{\sqrt{2}}$ であるから、長方形 $AILH$ の面積は $\frac{a}{\sqrt{2}} \times a = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}$ となる。同様にして、長方形 $BCJI$ 、長方形 $DEKJ$ 、長方形 $FGLK$ の面積も $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$ である。さらに、正方形 $IJKL$ の面積は a^2 である。したがって、 $G(a) = 4 \times \frac{a^2}{4} + 4 \times \frac{\sqrt{2}a^2}{2} + a^2 = (2 + 2\sqrt{2})a^2$ となる。



(3) (1), (2) より, $F(a) = 4 + a - a^2 - G(a)$ のとき, $4 - 2a = 4 + a - a^2 - (2 + 2\sqrt{2})a^2$ である。よって, $(3 + 2\sqrt{2})a^2 - 3a = 0$ を得る。 $a \neq 0$ であるから, $a = \frac{3}{3+2\sqrt{2}} = 9 - 6\sqrt{2}$ である。

(4) (1), (2) より,

$$F(a) + G(a) = (4 - 2a) + (2 + 2\sqrt{2})a^2 = (2 + 2\sqrt{2}) \left(a - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right)^2 + \frac{9 - \sqrt{2}}{2}$$

である。 $0 < a < 2$ であるから, $F(a) + G(a)$ は $a = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{9 - \sqrt{2}}{2}$ をとる。

(次のページへ続く)

II.

(1) (i)の操作後, 容器 B には $x + 500$ (g)の食塩水が入っている。
 また(ii)の操作後, 容器 C には $2x + \frac{x+500}{2} = \frac{5x+500}{2}$ g の食塩水が入っている。
 したがって(iii)の操作後, 容器 C には $\frac{1}{2} \times \frac{5x+500}{2} = \frac{5x+500}{4}$ g の食塩水が入っている。

(2) (i)の操作後, 容器 A には500g の食塩水が入っており, 容器 B には $x + 500$ (g)の食塩水が入っている。
 また(ii)の操作後, 容器 A には $500 + \frac{x+500}{2} = \frac{x+1500}{2}$ g の食塩水が入っており, 容器 C には $2x + \frac{x+500}{2} = \frac{5x+500}{2}$ g の食塩水が入っている。
 したがって(iii)の操作後, 容器 A には $\frac{x+1500}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{5x+500}{2} = \frac{7x+3500}{4}$ g の食塩水が入っている。

(3) (a) (2)より, $\frac{7x+3500}{4} = 980$ を得る。これを解いて, $x = 60$ である。

(3) (b) (i)(ii)(iii)の操作前には, 容器 A, 容器 B, 容器 C の食塩水にはそれぞれ $1000 \times \frac{16}{100} = 160$ g, $60 \times \frac{8}{100} = \frac{24}{5}$ g, $120 \times \frac{4}{100} = \frac{24}{5}$ g の食塩が含まれていることに注意する。
 (i)の操作後, 容器 B の食塩水には $80 + \frac{24}{5} = \frac{424}{5}$ g の食塩が含まれる。また(ii)の操作後, 容器 C の食塩水には $\frac{1}{2} \times \frac{424}{5} + \frac{24}{5} = \frac{236}{5}$ g の食塩が含まれている。よって(iii)の操作後, 容器 C の食塩水には $\frac{1}{2} \times \frac{236}{5} = \frac{118}{5}$ g の食塩が含まれる。

(3) (c) (i)(ii)(iii)の操作前には, 容器 A, 容器 B, 容器 C の食塩水にはそれぞれ160g, $\frac{24}{5}$ g, $\frac{24}{5}$ g の食塩が含まれていることに注意する。
 (i)の操作後, 容器 A の食塩水には80g の食塩が含まれ, 容器 B の食塩水には $80 + \frac{24}{5} = \frac{424}{5}$ g の食塩が含まれている。また(ii)の操作後, 容器 A の食塩水には $\frac{1}{2} \times \frac{424}{5} + 80 = \frac{612}{5}$ g の食塩が含まれており, 容器 C の食塩水には $\frac{1}{2} \times \frac{424}{5} + \frac{24}{5} = \frac{236}{5}$ g の食塩が含まれている。
 よって(iii)の操作後, 容器 A の食塩水には $\frac{612}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{236}{5} = 146$ g の食塩が含まれる。